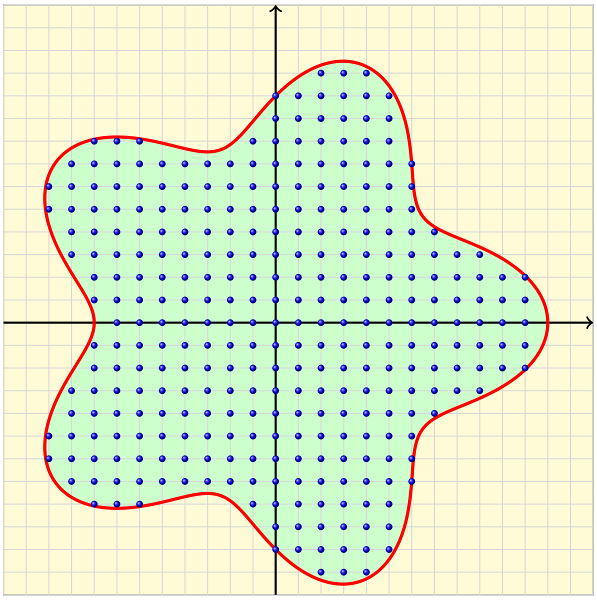
Nombre de points à coordonnées entières dans un domaine fermé, nombres de solutions de systèmes diophantiens diagonaux (Olivier Robert, MCF à l'Institut Camille Jordan, équipe de Combinatoire et Théorie des Nombres) Partenariats avec des collègues de l'ENS Lyon, de l'Université de Göttingen (Allemagne) et de l'Université de Gottenbörg (Suède)

La Théorie des Nombres est une branche de la recherche mathématique qui s'intéresse aux questions d'arithmétique, tels que l'étude de famille particulières de nombres entiers. L'une des catégories les plus célèbres parmi les nombres entiers est celle des nombres premiers. Bien que les premiers soeint très anciens (Antiquité),elle recèle encore énormément de mystère, et reste au coeur de nombreuses questions actuelles.

Les questions d'arithmétique, à travers les siècles ont donné lieu à différents courants et techniques, qui relèvent de domaines mathématiques différents. Parmi ceux-ci se trouve un domaine appelé **Théorie Analytique des nombres** : il s'agit d'utiliser des outils de l'analyse (fonctions, suites, intégrales, ...) afin d'élucider la structure de certains ensembles construits à l'aide des nombres entiers. Ces techniques sont variées et permettent une vision statistique (ou macroscopique) de certains ensembles de nombres entiers possédant a priori un comportement erratique.

A l'Institut Camille Jordan, les travaux de recherche d'Olivier Robert portent sur des questions de Théorie Analytique des Nombres. Parmi celles-ci se trouve deux catégories :

1) La première concerne des problèmes liés au comptage de points à coordonnées entières dans un domaine fermé de grand diamètre



Dans la figure exemple ci-contre, on part d'une figure géométrique que l'on dilate d'un facteur X de plus en plus grand : le domaine dilaté est celui délimité par la courbe rouge.

En première approximation, il paraît raisonnable de penser que le **nombre de points** à coordonnées entières dans ce domaine est proche de l'**aire du domaine** (en vert). On a donc

Nombre de points entiers dans le domaine vert
= Aire du domaine vert + Erreur.

Le point crucial de l'étude est d'évaluer finement le terme d'erreur.

De nombreuses applications arithmétiques relève de ce type de problème, en particulier des applications hors des mathématiques. À titre d'exemple, mentionnons un problème d'arithmétique des ordinateurs étudié en collaboration avec des collègues du laboratoire LIP de l'ENS Lyon, et qui concerne l'étude théorique des problèmes d'arrondis en machine, domaine crucial pour le calcul certifié.

2) La deuxième catégorie de problèmes concerne l'étude du nombre de solutions d'équations ou de systèmes diophantiens. Voici un exemple historique classique : considérons le nombre $A(N)$ de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - (x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 + x_8^3) = 0$$

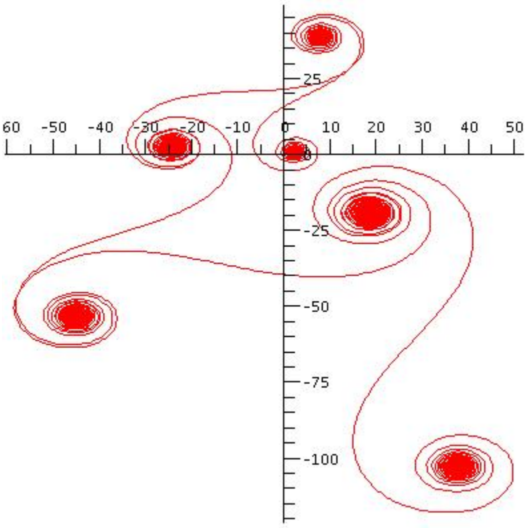
lorsque toutes les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_8$ sont des entiers compris entre 1 et N. Le but est ici d'étudier le comportement de $A(N)$ lorsque N devient très grand, et d'interpréter le terme principal obtenu.

Le point de départ de l'étude repose sur l'analyse de Fourier : on a l'écriture analytique

$$A(N) = \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{N} \exp(2i\pi\alpha x^3) \right|^8 \mathrm{d}\alpha,$$

Il s'agit, à l'aide d'un découpage extrêmement fin de cette intégrale, d'en extraire la contribution principale. On montre qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$A(N) = C_0 N^5 + \text{ erreur } \qquad (N \to +\infty)$$



La difficulté provient du fait que la somme sous le signe intégral change radicalement de comportement selon la nature de α. Le même phénomème se produit plus généralement pour les sommes du type

$$\sum_{x=1}^{N} \exp\left(2i\pi f(x)\right)$$

où f est une phase réelle régulière. Le graphe ci-contre montre un exemple de telle somme, et des oscillations qui peuvent intervenir.

$$\sum_{x=1}^{N} \exp(2i\pi\sqrt{2}(x+1250)^{1,2}) \qquad (N = 1, 2, \ldots, 20000)$$

Le but des projets initiés d'une part avec les collègues de l'Université de Göttingen, et d'autre part avec l'Université de Gottenbörg est de généraliser ce type d'étude. À titre d'exemple, un étude similaire a été réalisée pour le nombre $B(N)$ de solutions du système

$$\begin{cases} a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + \cdots + a_{10} x_{10}^3 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{10} x_{10} = 0, \end{cases}$$

où $x_1, \ldots, x_{10}$ sont des entiers compris entre $-N$ et $+N$.